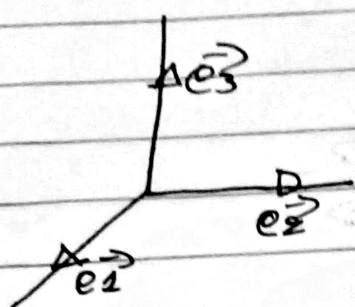


23/3/17

Την προηγούμενη φορά είπαμε:

Εξωτερικό γινόμενο - Μεικτό γινόμενο



$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ορθοκανονική
δεξιόστροφη βάση

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \vec{\gamma} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \end{array} \right.$$

$$[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

$|\vec{a} \times \vec{\beta}| = \epsilon_{\mu\nu}$ τα παρ/μα
με αιμές $\vec{a}, \vec{\beta}$

$|[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]| = \text{όγκος των}$
παρ/δου με αιμές $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

Σημαντικές ιδιότητες: $\vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{\gamma}$

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \vec{a}$$

$$= a_1 \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\epsilon} \rangle$$

$$\vec{\gamma} \times \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{a} \rangle = \langle \vec{\gamma}, \vec{a} \times \vec{\beta} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\epsilon} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\epsilon} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) \rangle = \\ &= \langle \vec{a}, \langle \vec{\beta}, \vec{\delta} \rangle \vec{\gamma} - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\delta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\delta} \rangle \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \langle \vec{a}, \vec{\delta} \rangle \\ &= \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{\delta} \rangle \\ \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle & \langle \vec{\beta}, \vec{\delta} \rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{j} \times \vec{\delta}) &= (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{E} = \langle \vec{a}, \vec{E} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle \vec{a} = \\
 &= \langle \vec{a}, \vec{j} \times \vec{\delta} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{j} \times \vec{\delta} \rangle \vec{a} = \\
 &= [\vec{a}, \vec{j}, \vec{\delta}] \vec{\beta} - [\vec{\beta}, \vec{j}, \vec{\delta}] \vec{a}
 \end{aligned}$$

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{j} \times \vec{\delta}) = \vec{E} \times (\vec{j} \times \vec{\delta}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \vec{E}, \vec{\delta} \rangle \vec{j} - \langle \vec{E}, \vec{j} \rangle \vec{\delta} = \\
 &= \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\delta} \rangle \vec{j} - \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{j} \rangle \vec{\delta} = \\
 &= \langle \vec{\delta}, \vec{a} \times \vec{\beta} \rangle \vec{j} - \langle \vec{j}, \vec{a} \times \vec{\beta} \rangle \vec{\delta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{j} \times \vec{\delta}) = [\vec{\delta}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{j} - [\vec{j}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{\delta} \\
 &= [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\delta}] \vec{j} - [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}] \vec{\delta}
 \end{aligned}$$

Παράθεσε $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}, \vec{\delta}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
 &[\vec{a}, \vec{j}, \vec{\delta}] \vec{\beta} - [\vec{\beta}, \vec{j}, \vec{\delta}] \vec{a} = [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\delta}] \vec{j} - [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}] \vec{\delta} \\
 \Leftrightarrow &[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}] \vec{\delta} = [\vec{\beta}, \vec{j}, \vec{\delta}] \vec{a} + [\vec{j}, \vec{a}, \vec{\delta}] \vec{\beta} + \\
 &[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\delta}] \vec{j}
 \end{aligned}$$

Υπόθεση: $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}$ είναι γραμμικά $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}] \neq 0$
 $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}\}$ βάση:

$$\vec{\delta} = \frac{[\vec{\beta}, \vec{j}, \vec{\delta}]}{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}]} \vec{a} + \frac{[\vec{j}, \vec{a}, \vec{\delta}]}{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}]} \vec{\beta} + \frac{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\delta}]}{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}]} \vec{j}$$

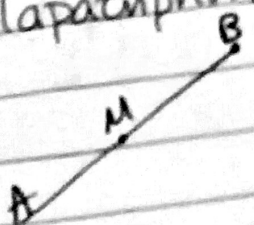
$$\begin{cases} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \vec{j} = (j_1, j_2, j_3) \end{cases} \quad \vec{\delta} = (x, y, z)$$

$$x =$$

$$y =$$

$$z =$$

Παρατήρηση:

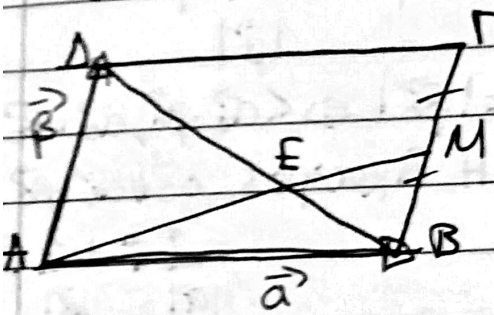


$$\begin{aligned} \text{Μ μέσο τῆς } AB &\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{AO} + \vec{OM} = \vec{MO} + \vec{OB} \Leftrightarrow \\ &2\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OB} \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: Μ μέσο τῆς AB $\Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

Άσκηση 1

Έστω παρ/μο ABCD και Μ μέσο τῆς πλευρᾶς BC. Ἡ ευθεῖα DB τέμνει τὴν ευθεῖα AM ἐστὶν ὥστε τὸ τμήμα DE νὰ εἶναι διπλάσιο τοῦ BE.



Λύση: Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{AB}$ και $\vec{\beta} = \vec{AD}$ εἶναι βάση του χώρου τῶν διανυσμάτων τοῦ επιπέδου τοῦ παρ/μο.

Ἀρκεῖ ν.δ.ο $\vec{DE} = \frac{2}{3} \vec{DB}$

Επειδὴ $\vec{DE}, \vec{DB}$ εἶναι συγγραμμὰ, ἔχω ὅτι $\vec{DE} = \lambda \vec{DB}$ (1)

$\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (2)
 $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE}$, $\vec{AE} = \mu \vec{AM} = \frac{\mu}{2} (\vec{AB} + \vec{AD})$

Ἀρα $\vec{DE} = \frac{\mu}{2} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$

$\vec{DE} = \frac{\mu}{2} (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{DE} = \mu \vec{\alpha} + (\frac{\mu}{2} - 1) \vec{\beta}$ (3)

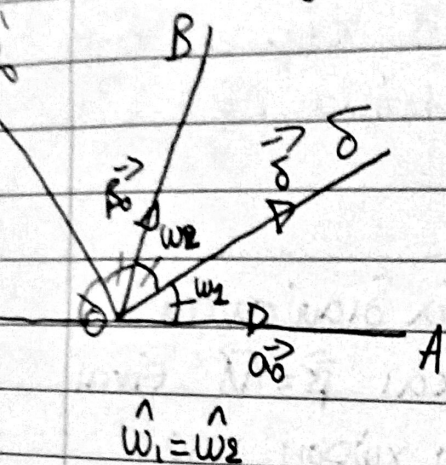
$$(1) \Leftrightarrow \mu \vec{a} + \frac{\mu-2}{2} \vec{b} = \lambda \vec{a} - \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda \\ \frac{\mu-2}{2} = -\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda \\ \frac{\lambda-2}{2} = -\lambda \Leftrightarrow \lambda-2 = -2\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

Εφαρμογή: Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, τότε $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} + \vec{b}$

Δίνεται γωνία $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$



$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{b_0} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

$$\vec{b_0} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

$$|\vec{a_0}| = 1 = |\vec{b_0}| \Rightarrow \langle \vec{a_0} - \vec{b_0}, \vec{a_0} + \vec{b_0} \rangle = 0$$

Ισχυρισμός: Η διχοτόμος $OD \parallel \vec{a_0} + \vec{b_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$

$$\vec{\delta} = \vec{a_0} + \vec{b_0}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού:

$$\cos(\vec{\delta}, \vec{a_0}) = \frac{\langle \vec{\delta}, \vec{a_0} \rangle}{|\vec{\delta}| |\vec{a_0}|} = \frac{\langle \vec{a_0} + \vec{b_0}, \vec{a_0} \rangle}{|\vec{\delta}|} = \frac{\langle \vec{a_0}, \vec{a_0} \rangle + \langle \vec{a_0}, \vec{b_0} \rangle}{|\vec{\delta}|}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{\delta}, \vec{a_0}) = \frac{1 + \langle \vec{a_0}, \vec{b_0} \rangle}{|\vec{\delta}|}$$

$$\cos(\vec{\sigma}, \vec{\rho}) = \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\rho} \rangle}{|\vec{\sigma}| |\vec{\rho}|} = \frac{\langle \vec{a}_0 + \vec{\beta}_0, \vec{\rho} \rangle}{|\vec{\sigma}|} = \frac{\langle \vec{a}_0, \vec{\rho} \rangle + \langle \vec{\beta}_0, \vec{\rho} \rangle}{|\vec{\sigma}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{\sigma}, \vec{\rho}) = \frac{1 + \langle \vec{a}_0, \vec{\rho} \rangle}{|\vec{\sigma}|} \Rightarrow (\vec{\sigma}, \vec{a}_0) = (\vec{\sigma}, \vec{\rho})$$

Συμπέρασμα: i) Η εσωτερική διχοτόμος
είναι $\parallel \vec{a}_0 + \vec{\beta}_0$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \quad \vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$$

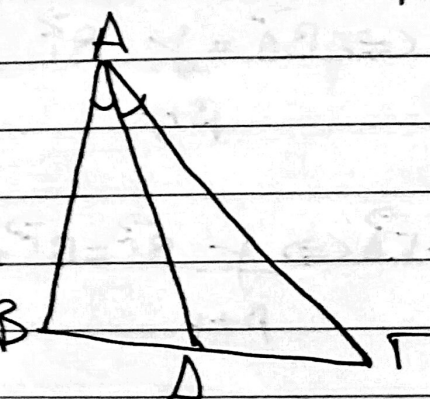
$$\vec{\beta}_0 = \frac{1}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta} \quad \vec{\beta} = |\vec{\beta}| \vec{\beta}_0$$

ii) Η διεύθυνση της διχοτόμου της παραλληλογράμμου
είναι $\vec{\beta}_0 - \vec{a}_0$.

Άσκηση 2

ΑΔ εσωτερική διχοτόμος του $\triangle AB\Gamma$

$$\Delta.O \quad \vec{AD} = \frac{1}{\beta + \gamma} (\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AG})$$



Απόδειξη: Η διχοτόμος ΑΔ έχει
τη διεύθυνση του διανύσματος
(μοναδιαίου) $\frac{1}{\gamma} \vec{AB} + \frac{1}{\beta} \vec{AG}$

$$\text{Άρα } \vec{AD} = \lambda \left(\frac{1}{\gamma} \vec{AB} + \frac{1}{\beta} \vec{AG} \right) \quad (1)$$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}, \text{ όπως } \vec{BA} = \mu \vec{B\Gamma}$$

(επειδή παράλληλο)

$$\vec{BD} = \mu \vec{B\Gamma} = \mu (\vec{AG} - \vec{AB})$$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \mu \vec{AG} - \mu \vec{AB} \Rightarrow \vec{AD} = (1 - \mu) \vec{AB} + \mu \vec{AG} \quad (2)$$

$\{\vec{AB}, \vec{AG}\}$ είναι βάση του χώρου των διανυσμάτων
του επιπέδου του $\triangle AB\Gamma$

Από (1), (2)

$$\begin{cases} 1 - \mu = \frac{\lambda}{\beta} \\ \mu = \frac{\lambda}{\beta} \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{\lambda}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$1 = \frac{\lambda}{\beta + \gamma} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\beta \gamma}{\beta + \gamma}}$$

$$\vec{A\Delta} = \frac{\beta \gamma}{\beta + \gamma} \left(\frac{1}{\gamma} \vec{AB} + \frac{1}{\beta} \vec{AC} \right) \Rightarrow$$

Εδώ
τελειώνει ->

$$\boxed{\vec{A\Delta} = \frac{1}{\beta + \gamma} (\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC})}$$

Σχόλιο:

(Αόχετο)

$$\mu = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

$$\vec{B\Delta} = \mu \vec{BC} \Leftrightarrow \boxed{\vec{B\Delta} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \vec{BC}}$$

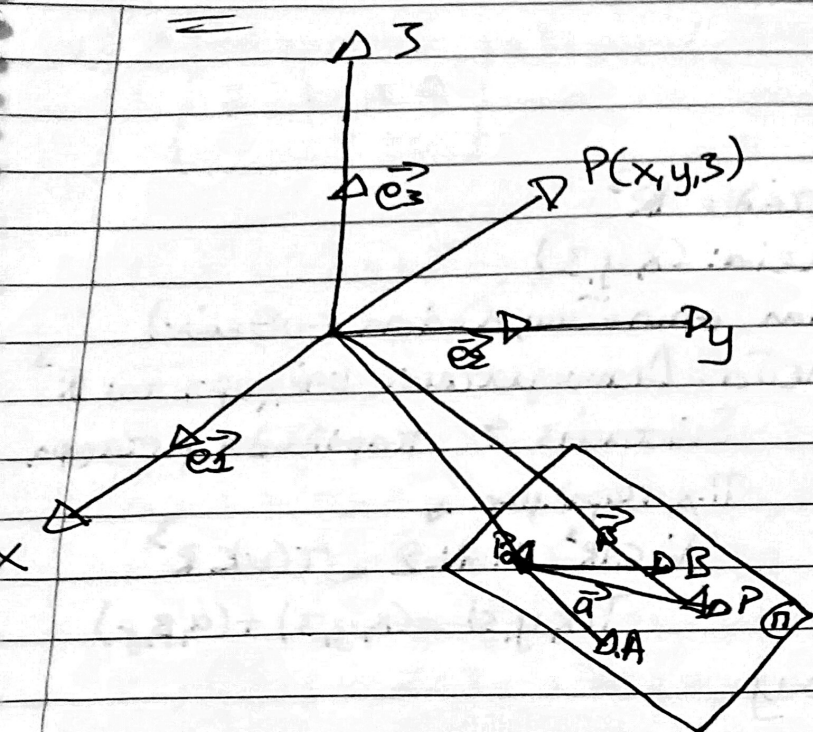
$$\vec{B\Delta} = \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \vec{BC} = \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} \Rightarrow$$

$$\vec{\Gamma\Delta} = \left(\frac{\gamma}{\beta + \gamma} - 1 \right) \vec{BC} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\Gamma\Delta} = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \vec{BC}}$$

$$\begin{aligned} |\vec{B\Delta}| &= \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \cdot a \\ |\vec{\Gamma\Delta}| &= \frac{\beta}{\beta + \gamma} \cdot a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{B\Delta}|}{|\vec{\Gamma\Delta}|} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Θεώρημα
Διχοτομής



Σημεία (x, y, z)

Μοντέλο $\mathbb{R}^3$

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$P \Leftrightarrow (x, y, z)$$

Επίπεδα: Είναι σύνολα της μορφής:

$$\{(x_0, y_0, z_0) + \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(b_1, b_2, b_3) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

και $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$

Είναι Γ.Α.

Έστω (π) τυχόν επίπεδο που ορίζεται από 3 μη συνευθειακά σημεία P_0, A, B , τότε τα διανύσματα $\vec{P_0A}, \vec{P_0B}$ είναι Γ.Α.

Άρα $\{\vec{P_0A}, \vec{P_0B}\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου των διανυσμάτων του (π) .

Έστω $P \in (\pi)$. Τότε το διάνυσμα θέσης του P είναι $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P}$, το $\vec{P_0P}$ γράφεται ως $(\vec{OP_0}$ διαν. θέσης του $P_0)$. Διάνυσμα του διαν. χώρου του διαν. του επιπέδου

γράφεται:

$$\vec{P_0P} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Συμπέρασμα: Το διαν. θέσης των τυχόν σημείων $P \in (\pi)$ είναι $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$